Olimpiadi Svizzere di Fisica

Prima selezione

Lugano, 18 gennaio 2017

Prima parte	**:**	**Multiple Choice – 22 domande**
Seconda parte	**:**	**Problemi – 3 domande**

Materiale autorizzato	:	Calcolatrice non programmabile
		Materiale per scrivere e disegnare

Buon lavoro !

Supported by :

Staatssekretariat für Bildung und Forschung und Innovation
BASF (Basel)
Deutschschweizerische Physikkommission VSMP / DPK
Materials Science & Technology
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
ETH Zurich Department of Physics
Fondation Claude & Giuliana
Ernst Göhner Stiftung, Zug
Hasler Stiftung, Bern
Metrohm Stiftung, Herisau
Neue Kantonsschule Aarau
Novartis International AG (Basel)
Quantum Science and Technology
F. Hoffman-La Roche AG (Basel)
Société Valaisanne de Physique
Swiss Academy of Engineering Sciences SATW
Swiss Academy of Sciences
Swiss Physical Society
Syngenta AG
Università della Svizzera italiana
Universität Bern FB Physik/Astronomie
Universität Zürich FB Physik Mathematik

Costanti fondamentali

Velocità della luce nel vuoto	c	$=$	$299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
Permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	$=$	$4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}A^{-2}{\cdot}s^{-2}}$
Costante dielettrica del vuoto	ε_0	$=$	$8.854\,187\,817\,\ldots \times 10^{-12}\,\mathrm{A^2{\cdot}s^4{\cdot}kg^{-1}{\cdot}m^{-3}}$
Costante di Planck	h	$=$	$6.626\,069\,57 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}$
Carica elementare	e	$=$	$1.602\,176\,565\,(35) \times 10^{-19}\,\mathrm{A{\cdot}s}$
Costante gravitazionale	G	$=$	$6.673\,84\,(80) \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$
Accelerazione terrestre	g	$=$	$9.81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$
Numero di Avogadro	N_A	$=$	$6.022\,141\,29\,(27) \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Costante di Boltzmann	k_B	$=$	$1.380\,648\,8\,(13) \times 10^{-23}\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	$=$	$5.670\,373\,(21) \times 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$
Massa dell'elettrone	m_e	$=$	$9.109\,382\,6\,(16) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Massa del protone	m_p	$=$	$1.672\,621\,71\,(29) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Massa del neutrone	m_n	$=$	$1.674\,927\,28\,(29) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Domande a risposta multipla: foglio risposte

Durata: 60 minuti
Punteggio: 22 punti (1 punto per ogni risposta corretta)
Riportate le vostre risposte nelle caselle previste su questa pagina.
Ciascuna domanda ammette una sola risposta corretta

Cognome	:
Nome	:
Totale	:

	a)	b)	c)	d)	e)
Domanda 1	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 2	☐	☐	☐	☐	
Domanda 3	☐	☐	☐	☐	
Domanda 4	☐	☐	☐	☐	
Domanda 5	☐	☐	☐	☐	
Domanda 6	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 7	☐	☐	☐	☐	
Domanda 8	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 9	☐	☐	☐	☐	
Domanda 10	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 11	☐	☐	☐	☐	
Domanda 12	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 13	☐	☐	☐	☐	
Domanda 14	☐	☐	☐	☐	
Domanda 15	☐	☐	☐	☐	
Domanda 16	☐	☐	☐	☐	
Domanda 17	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 18	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 19	☐	☐	☐	☐	
Domanda 20	☐	☐	☐	☐	☐
Domanda 21	☐	☐	☐	☐	
Domanda 22	☐	☐	☐	☐	☐

Domanda 1
Il nostro universo attualmente è

a) in un'espansione accelerata.
b) in un'espansione a velocità costante.
c) statico.
d) in una contrazione a velocità costante.
e) in una contrazione accelerata.

Domanda 2
Un uccello è posato su una barca su un lago. Ad un certo istante l'uccello prende il volo. Il livello del lago:

a) si alza.
b) resta costante.
c) si abbassa.
d) Non abbiamo abbastanza informazioni per rispondere.

Domanda 3
Supponendo che si possa piegare un foglio di carta per più di 7 o 8 volte. Quante volte bisognerà piegare questo foglio affinché lo spessore sia uguale alla distanza tra la terra e la luna (384 400 km)?

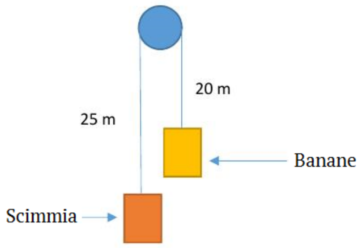
a) 42
b) 168
c) 253
d) 283

Domanda 4
Un piccolo villaggio situato dietro una collina desidera ascoltare la radio. Nella regione c'è una radio AM che trasmette a 980 kHz e una radio FM che trasmette a 89 MHz. Tuttavia, le due emittenti sono nascoste dalla collina. È possibile ascoltare:

a) la radio AM.
b) la radio FM.
c) tutte e due.
d) nessuna.

Domanda 5

Un casco di banane di massa m è appeso a 20 m da una carrucola (vedi figura sottostante). Dall'altro lato una scimmia di massa m è appesa a 25 m dalla carrucola. Sapendo che la scimmia ha abbastanza energia per sollevare il suo peso per 20 m lungo la propria corda, riuscirà a raggiungere le banane per mangiarle? (trascurate la massa della carrucola e il suo attrito)



a) No, non appena la scimmia prova a tirarsi su, le banane salgono fino alla carrucola, ma la scimmia rimane ferma sul posto.

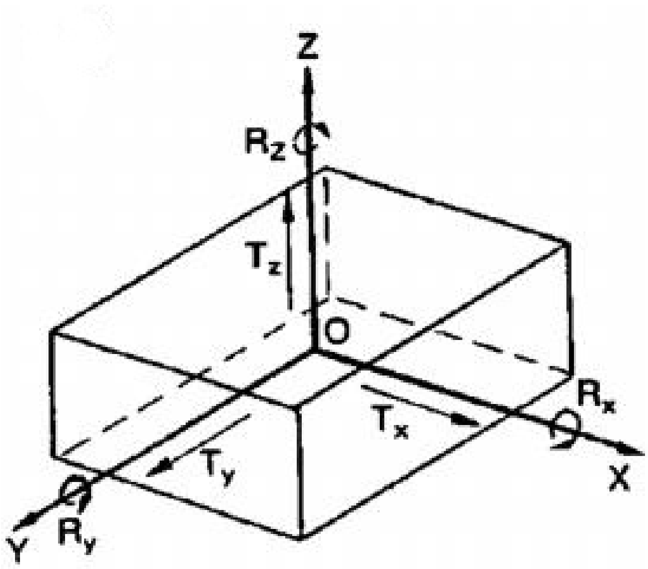
b) Sì, la scimmia riesce a tirarsi su e le banane restano ferme sul posto.

c) No, la scimmia riesce a tirarsi su, ma anche le banane salgono, senza che la scimmia le possa acchiappare.

d) Sì, nonsostante le banane salgano quando la scimmia si tira su, la scimmia riesce ad acchiappare le banane.

Domanda 6

Quali assi di rotazione del parallelepipedo rappresentato nella figura sottostante sono stabili?



a) nessuno

b) gli assi Y e Z

c) gli assi X, Y, Z

d) gli assi X e Z

e) gli assi X e Y

Domanda 7

Una persona si guarda allo specchio. Osserva che la sommità della sua testa coincide esattamente con quella dello specchio. Allo stesso modo, i suoi piedi coincidono esattamente con il fondo dello specchio. Se questa persona si avvicina per guardarsi meglio, cosa succede?

a) Coprirà lo specchio intero, con la testa e i piedi alle estremità.

b) Coprirà lo specchio intero ma non vedrà più né la testa né i piedi.

c) Non coprirà tutto lo specchio, potrà vedere il cielo sopra la sua testa, e il pavimento sotto i suoi piedi.

d) Vedrà i piedi in fondo allo specchio, ma non tutta la testa.

Domanda 8

Sei in giro in auto per una corsa. Vuoi fare due giri del percorso. Il primo giro lo percorri con una velocità media di $v_1 = 50\,\mathrm{kmh^{-1}}$. Quanto devi andare veloce nel secondo giro per avere una velocità media totale di $v = 60\,\mathrm{kmh^{-1}}$?

a) $60\,\mathrm{kmh^{-1}}$

b) $70\,\mathrm{kmh^{-1}}$

c) $75\,\mathrm{kmh^{-1}}$

d) $80\,\mathrm{kmh^{-1}}$

e) $90\,\mathrm{kmh^{-1}}$

Domanda 9

Aiuti tua mamma a sgomberare il solaio. Ti dà il compito di arrotolare un tappeto attorno ad un tubo cilindrico. Sono dati il raggio del tubo $r = 10\,\mathrm{cm}$ e la sua lunghezza $l = 0.8\,\mathrm{m}$. Il tuo tappeto ha uno spessore di $d = 5\,\mathrm{mm}$, è lungo $l' = 3.4\,\mathrm{m}$ e largo $b = 6.5\,\mathrm{dm}$. Che diametro approssimativo avrà il tubo una volta che tutto il tappeto sarà stato arrotolato?

a) 12.4 cm

b) 18.6 cm

c) 24.8 cm

d) 37.2 cm

Domanda 10

Una ditta ti chiedi di valutare il numero massimo di persone che possono stare nel suo ascensore. Sai che la fune dell'ascensore può reggere una forza massima di $F_S = 15\,000\,\mathrm{N}$ prima di rompersi. Inoltre, l'ascensore deve raggiungere la sua velocità finale di ascesa $v_{max} = 5\,\mathrm{ms^{-1}}$ in 3 s. Supponendo che la massa media di una persona sia $m = 75\,\mathrm{kg}$, quante persone può ospitare l'ascensore?

a) 17

b) 18

c) 19

d) 20

e) 24

Domanda 11

Il 21 marzo ci troviamo all'equatore. In questo giorno di equinozio il sole sorge alle 6 h, è allo zenit alle 12 h e tramonta alle 18 h. Piantiamo un bastone verticale. Alle 14 h osserviamo che l'ombra del bastone misura l. Quanto sarà lunga l'ombra alle 16 h?

a) $0.5l$

b) $2l$

c) $3l$

d) $5l$

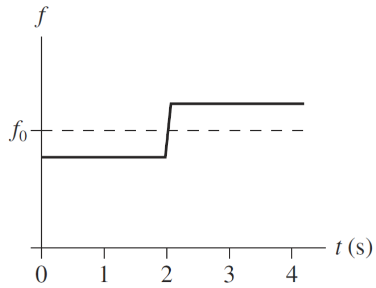
Domanda 12

Due lampadine da 75 W (a 220 V) sono connesse in serie. Il tutto è connesso ad un'alimentazione a 220 V. Quanta potenza è dissipata da ogni lampadina?

a) 75 W
b) 60.125 W
c) 18.75 W
d) 37.5 W
e) dipende dalla loro resistanza

Domanda 13

Sei a $x = 0$ e ascolti un suono generato con frequenza f_0. Il grafico sottostante mostra la frequenza che ascolti in funzione del tempo per un intervallo di 4 s.



Quale delle seguenti situazioni descrive la sorgente?

a) La sorgente si muove da destra a sinistra e a $t = 2$ s si trova il più vicino a te.
b) La sorgente si muove da sinistra a destra e a $t = 2$ s si trova il più vicino a te.
c) La sorgente si muove verso di te senza raggiungerti; a partire da $t = 2$ s si allontana lungo la stessa direzione.
d) La sorgente si allontana da te; a partire da $t = 2$ s si avvicina lungo la stessa direzione.

Domanda 14

Stimando la superficie delle vostre spalle a 50 cm · 10 cm, quanti kg di aria trasportate su di voi ogni giorno?

a) 10
b) 50
c) 100
d) 500

Domanda 15

Abbiamo un bicchiere d'acqua di 3 dl a 10 °C che desideriamo raffreddare. Aggiungiamo 45 cm^3 di ghiaccio a −5 °C. Cosa otteniamo dopo un po' di tempo? Supponi che il sistema composto da ghiaccio e acqua non scambi né calore né energia con il bicchiere e l'ambiente circostante.

Costanti:

- Densità del ghiaccio: 0.92 gcm^{-3}
- Densità dell'acqua: 1.0 gcm^{-3}
- Calore specifico dell'acqua: 4.2 $kJkg^{-1}K^{-1}$
- Calore specifico del ghiaccio: 2.1 $kJkg^{-1}K^{-1}$
- Calore latente di fusione del ghiaccio: 333.5 $kJkg^{-1}$

a) 230 g d'acqua / 111 g di ghiaccio / entrambi a 0 °C

b) 337 g d'acqua / 5 g di ghiaccio / entrambi a 0 °C

c) 341 g d'acqua / 0 g di ghiaccio / 1.74 °C

d) 322 g d'acqua / 19 g di ghiaccio / entrambi a 0 °C

Domanda 16

L'aereo Solar Impulse SI2 è un veicolo elettrico dotato di 17 248 celle fotovoltaiche. Le sue batterie, aventi una densità energetica di 260 $Whkg^{-1}$, rappresentano il 28 % della massa totale dell'aereo che è 2300 kg. L'aereo vola ad una velocità di 60 kmh^{-1} e altitudine 8500 m al di sopra del livello del mare al tramonto.

Approssimativamente di quanta energia dispone l'aereo per potersi mantenere in aria fino al sorgere del sole?

a) 170 000 J

b) 170 kWh

c) 4.8×10^{27} eV

d) 160 Pam^3

Domanda 17 Quale di queste dimensioni fisiche non corrisponde ad un'unità di energia?

a) $\mu A^2 \cdot s \cdot S^{-1}$

b) $MPa \cdot cm^3$

c) Gy·mg

d) $N \cdot V \cdot S \cdot T \cdot Pa^{-1}$

e) Nessuna delle risposte.

Domanda 18

Un satellite geostazionario ha :

a) un'orbita ellittica.

b) un periodo di rivoluzione siderale di esattamente 24 h.

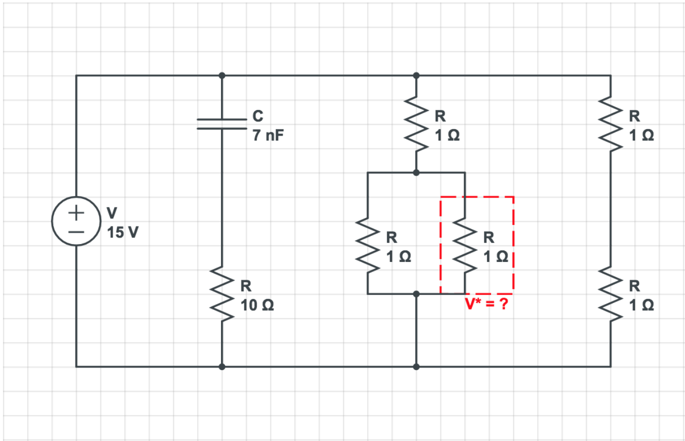
c) una velocità nulla.

d) un'accelerazione nulla.

e) Nessuna delle risposte.

Domanda 19

Il circuito seguente è connesso da diverso tempo. Qual è la tensione V^* della resistenza incorniciata di rosso?



a) 2.5 V

b) 5 V

c) 7.5 V

d) 10 V

Domanda 20

Quale delle seguenti affermazioni è corretta?

a) Il campo elettrico è un campo scalare.

b) La quantità di moto di un elettrone sottoposto ad un campo magnetico uniforme viene alterata dalla forza di Lorentz.

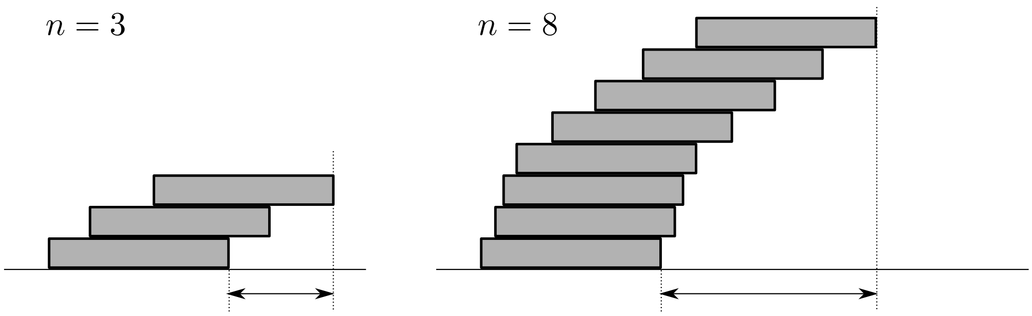
c) In presenza di un campo magnetico e in assenza di uno elettrico, la traiettoria di un elettrone in movimento sarà sempre un cerchio o una spirale.

d) La forza di Lorentz è sempre conservativa.

e) Nessuna delle risposte.

Domanda 21

Per Natale hai ricevuto un numero infinito di ceppi di legno a sezione rettangolare con lunghezza l, larghezza b e altezza h. Vorresti costruire un ponte su un lago mettendo questi ceppi uno sopra l'altro. Non hai a disposizione altri componenti, e disponi i ceppi uno sopra l'altro in modo che il momento angolare risultante è nullo. A che distanza dalla sponda puoi arrivare? (vedi anche la figura sottostante)



a) e^l

b) $\log(2^l)$

c) $l!$

d) ∞

Domanda 22

Qual è la distanza media tra due molecole di un gas a temperatura $T = 0\,°\mathrm{C}$ e pressione $P = 1.01 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$?

a) $3\,\mu\mathrm{m}$

b) $240\,\mathrm{nm}$

c) $67\,\mathrm{nm}$

d) $4\,\mathrm{nm}$

e) $750\,\mathrm{pm}$

Problemi teorici

Durata : 120 minuti
Valutazione : 48 punti

Cominciate ogni problema su un nuovo foglio, al fine di facilitarne la correzione.

Costanti fondamentali

Velocità della luce nel vuoto	c	=	$299\,792\,458\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
Permeabilità magnetica del vuoto	μ_0	=	$4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot A^{-2}\cdot s^{-2}}$
Costante dielettrica del vuoto	ε_0	=	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12}\,\mathrm{A^2\cdot s^4\cdot kg^{-1}\cdot m^{-3}}$
Costante di Planck	h	=	$6.626\,069\,57 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$
Carica elementare	e	=	$1.602\,176\,565(35) \times 10^{-19}\,\mathrm{A\cdot s}$
Costante gravitazionale	G	=	$6.673\,84(80) \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$
Accelerazione terrestre	g	=	$9.81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$
Numero di Avogadro	N_A	=	$6.022\,141\,29(27) \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Costante dei gas	R	=	$8.314\,459\,8(48)\,\mathrm{J\cdot mol^{-1}\cdot K^{-1}}$
Costante di Boltzmann	k_B	=	$1.380\,648\,8(13) \times 10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$
Costante di Stefan-Boltzmann	σ	=	$5.670\,373(21) \times 10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$

Esercizio 1 : Viaggio al centro della Terra *(16 punti)*

Fig. 1 – Covertina del romanzo

Il „Viaggio al centro della Terra" è un romanzo d'avventura del 1864 scritto da Jules Verne. Narra di una spedizione iniziata su un'isola, e prosegue attraverso un buco nel terreno a scendere fino al centro della Terra, e quindi fino a ritornare in superficie attraverso il Vesuvio. Oggi sappiamo decisamente di più, riguardo alla conformazione della Terra, ed in particolare che un viaggio attraverso la stessa rimarrà fantascienza ancora a lungo. In questo compito verrà ipotizzato e indagato un più moderno metodo per attraversare la Terra. Naturalmente anche questo esempio è finzione, tuttavia rimane interessante pensare cosa possa succedere, se qualcuno potesse compiere tale viaggio...

Per il viaggio al centro della Terra viene scavato un tunnel, che dalla superficie scorre attraverso il centro e quindi prosegue verso la superficie dal lato opposto del pianeta. La Terra sia considerata come una sfera perfetta con raggio R_E e una **densità omogenea**. Tutti i calcoli sono in funzione del sistema di riferimento della Terra. Effetti come attrito, forza di Corioli o forza centrifuga possono venire trascurati.

Per l'esercizio ti servono le seguenti costanti :

- Prodotto della costante gravitazionale G e la massa terrestre M_E :

$$G \cdot M_E = 3.9860042 \cdot 10^{14}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}^2}$$

- Raggio della Terra $R_E = 6371\,\mathrm{km}$

Parte A. Potenziale gravitazionale all'interno della Terra (8 punti)

La massa intera della Terra viene considerata nella forza esercitata su un oggetto nel suo potenziale gravitazionale („campo gravitazionale“) solo quando questo oggetto si trova all'esterno della sfera terrestre. Nel caso in cui l'oggetto si trovi all'interno della Terra, verrebbe influenzato unicamente dalla massa terrestre che si trova più vicina di lui rispetto al centro. Questo significa che se l'oggetto dovesse trovarsi da una distanza x dal centro della Terra, si comporterebbe come se venisse attratto unicamente dalla parte di Terra che si trova all'interno della sfera di raggio x.

i. (2 pt) Esprimi la massa $M(x)$ di una sfera di dimensioni inferiori e della stessa composizione terrestre con raggio x tramite il raggio della Terra R_E, la massa della Terra M_E e x.

ii. (2 pt) Calcola la forza gravitazionale F_G che verrebbe esercitata su un oggetto che si trovi a distanza x. Esprimi F_G tramite R_E, M_E, la massa m dell'oggetto e x.

Suggerimento : usa la Legge di Gravità di Newton : $F_G = \frac{GMm}{x^2}$

iii. (1 pt) Calcola, partendo dalla forza di gravità $F_G(x)$ all'interno della Terra (dalla domanda precedente) il potenziale gravitazionale $E_{\text{pot}}(x)$ sempre all'interno della sfera terrestre.

Suggerimento : Per il potenziale della forza di gravità all'interno della Terra vale :

$$E_{\text{pot}}(x) = \int_0^x F_G(z)\, dz$$

iv. (3 pt) Calcola la velocità v_m al centro della Terra (sia in formula che in numeri), nel caso in cui un uomo dovesse cadere nel tunnel con velocità iniziale nulla.

Parte B. Traiettoria della caduta (8 punti)

i. (2 pt) Esponi l'equazione differenziale per la traiettoria $x(t)$.

Suggerimento : seconda Legge di Newton

ii. (3 pt) Risolvi l'equazione differenziale per $x(t)$ considerando la condizione iniziale in cui l'oggetto all'inizio si trova all'estremità del tunnel, sulla superficie terrestre, e inizia la caduta con velocità iniziale nulla.

Suggerimento : la soluzione generale per l'equazione differenziale $y''(x) = -\lambda \cdot y(x)$ *con* $\lambda > 0$ *è come segue :*

$$y(x) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right) + B \cdot \sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot x\right)$$

A e B sono costanti d'integrazione che possono venire determinate grazie alle condizioni iniziali.

iii. (3 pt) Calcola nuovamente la velocità v_m al centro della Terra. Sfrutta questa volta la tua soluzione della traiettoria $x(t)$. Compara questo risultato con il corrispondente della domanda precedente.

Suggerimento : la velocità $v(t)$ è la derivata della funzione della posizione x(t) rispetto al tempo.

Esercizio 2 : Volo verso le stelle *(16 punti)*

Effetti relativistici possono essere ignorati in tutto l'esercizio.

Parte A. Pressione di radiazione (6 punti)

Le onde elettromagnetiche possono esercitare una forza su un corpo quando vengono assorbite o riflesse da quest'ultimo. Supponi che la forza di un raggio laser su un corpo nero sia F nella direzione di propagazione e la radiazione del laser venga completamente assorbita (vedi Figura 2a).

i. (2 pt) C'è una forza che il raggio esercita anche sul laser stesso ? Se sì, qual è la sua direzione ed il suo valore ?

ii. (2 pt) Qual è la forza che agisce su uno specchio che riflette completamente il raggio con un angolo di incidenza θ (Figura 2b) ?

Suggerimento : Cosa succede se un corpo nero assorbe il raggio dopo lo specchio ?

iii. (2 pt) Il valore di F dipende dalla potenza P del laser e dalla velocità della luce c. Quale equazione potrebbe legare le tre grandezze ? Tieni conto delle unità e scrivi l'espressione più semplice possibile. Supponendo che quest'espressione sia corretta, qual è il valore di F per un puntatore laser con una potenza di 1 mW ?

Parte B. Proxima Centauri (10 punti)

Proxima Centauri, con una distanza di 4.2 anniluce, è la stella più vicina al sole. Per cercare vita extraterrestre su un pianeta orbitante attorno ad essa, si vuole inviare una sonda spaziale alimentata attraverso un laser posizionato sulla terra che emette radiazione in direzione della stella. La sonda è equipaggiata con una grande vela solare che permette di catturare la luce del laser. Inoltre la sonda è composta da materiali molto leggeri, così che la sua massa è solo $m = 1$ g.

i. (2 pt) La propulsione è più efficiente se la vela solare riflette o assorbe completamente la luce del laser ? Motiva la tua risposta.

ii. (3 pt) Il laser non produce una luce perfettamente collimata. Di conseguenza la propulsione è efficiente solo quando la distanza s tra la sonda e il laser è minore di $s_L = 1 \times 10^7$ km. Supponi che per $s < s_L$ il laser eserciti una forza costante sulla sonda, mentre per $s > s_L$ la forza sia nulla. Quanto grande deve essere la forza iniziale per permettere alla sonda di raggiungere Proxima Centauri in 50 anni ? Considera le seguenti semplificazioni : inizialmente la sonda si trova immobile direttamente davanti al laser e l'influsso della gravità può essere ignorato.

iii. (3 pt) Disegna un grafico per ognuna delle seguenti quantità :

- s in funzione del tempo,
- la velocità della sonda in funzione del tempo,
- l'accelerazione della sonda in funzione del tempo.

iv. (2 pt) Utilizza le tue risposte alle domande A.iii e B.ii per calcolare la potenza del laser necessaria.

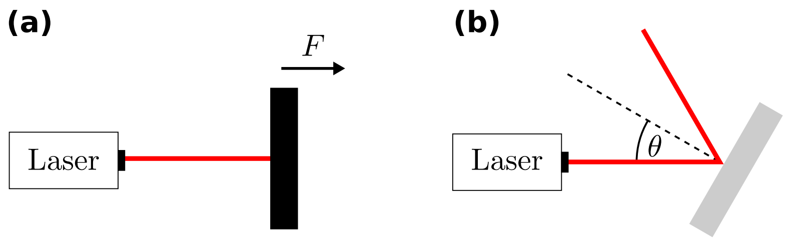
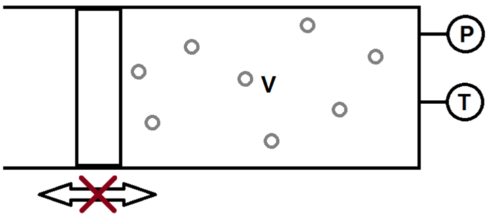


Fig. 2

Esercizio 3 : Sotto pressione *(16 punti)*

Parte A. Determinazione della massa (5 punti)



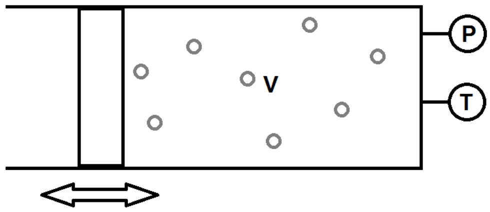
Dell'azoto si trova in un cilindro di $V = 2\,\mathrm{L}$ munito di un pistone che funge da tappo. In questa prima parte blocchiamo il pistone, riscaldiamo il gas a differenti temperature e misuriamo la pressione. I risultati sono indicati nella tabella qui sotto :

#	T(°C)	P(Pa)
1	10	168100
2	20	174000
3	50	191800
4	100	221500
5	150	251200
6	250	310600

i. (2 pt) Schizzate un grafico della temperatura del gas in funzione della pressione nel cilindro.
ii. (3 pt) Qual'è la massa dell'azoto all'interno del cilindro ?

Parte B. Equilibrio (2 punti)

Lasciamo ora il pistone libero di muoversi lungo l'asse del cilindro. In nessun caso il pistone può staccarsi dal cilindro. Salvo dove menzionate esplicitamente, ignoriamo lo scambio di calore tra il gas e l'ambiente esterno.



i. (2 pt) Se la temperatura del gas è di 23 °C, qual'è il volume assunto dal gas all'interno del cilindro ?

Parte C. Immersione (9 punti)

Il cilindro viene immerso sott'acqua, a 7 m al di sotto della superficie. La temperatura del gas nel cilindro è di 23 °C. Il pistone è sempre libero di muoversi lungo l'asse del cilindro.

Costanti :
- Densità dell'acqua :$\rho_{acqua} = 1.0\,\mathrm{gcm^{-3}}$
- Calore specifico dell'azoto : $c_{azoto} = 1.04\,\mathrm{kJkg^{-1}K^{-1}}$

i. (2 pt) Che volume assume il gas, supponendo che la temperatura non cambi ?
ii. (3 pt) Lasciando il cilindro sott'acqua, che quantità di calore è necessario fornire perché il suo volume divenga di 2 L ?
iii. (4 pt) Quale dev'essere la massa del cilindro in funzione della temperature del gas per far sì che quest'ultimo si trovi in equilibrio a questa profondità ? Per equilibrio si intende che non risale in superficie né sprofonda verso il basso. Il materiale del cilindro occupa un volume trascurabile e il pistone ha una massa trascurabile.

Multiple Choice : answers

	a)	b)	c)	d)	e)
Question 1	■	☐	☐	☐	☐
Question 2	☐	☐	■	☐	
Question 3	■	☐	☐	☐	
Question 4	■	☐	☐	☐	
Question 5	☐	☐	■	☐	
Question 6	☐	■	☐	☐	☐
Question 7	■	☐	☐	☐	
Question 8	☐	☐	■	☐	☐
Question 9	☐	☐	■	☐	
Question 10	■	☐	☐	☐	☐
Question 11	☐	☐	■	☐	
Question 12	☐	☐	■	☐	☐
Question 13	☐	☐	☐	■	
Question 14	☐	☐	☐	■	
Question 15	☐	■	☐	☐	
Question 16	☐	☐	■	☐	
Question 17	☐	☐	☐	☐	■
Question 18	☐	☐	☐	☐	■
Question 19	☐	■	☐	☐	
Question 20	☐	■	☐	☐	☐
Question 21	☐	☐	☐	■	
Question 22	☐	☐	☐	■	☐

Aufgabe 1 : Travel to the center of Earth: *solution (16 Punkte)*

Remark: For parts in the grading system where more than 0.5 points are given, you can always give half points for correct thoughts but wrong calculation or similar things.

Teil A. Gravitationspotential im Erdinnern (8 Punkte)

i. (2 P.) First, we recall that the volume V of a sphere with radius r is

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \,. \tag{1}$$

Since we assume that the density ρ_E of Earth is uniform, we infer that

$$M_E = \rho_E \frac{4\pi}{3} R_E^3$$

The mass of the smaller sphere with radius x, given that it has the same uniform density ρ_E, is

$$M(x) = \rho_E \frac{4\pi}{3} x^3 \,. \tag{2}$$

Thus, we calculate that

$$\frac{M(x)}{M_E} = \frac{x^3}{R_E^3}$$

$$\Rightarrow \quad M(x) = M_E \left(\frac{x}{R_E}\right)^3 \,. \tag{3}$$

Grading: 0.5 points for (1), *1 point* for (2), *0.5 points* for (3). If the solution deviates from this one, you might have to adjust the grading.

ii. (2 P.) Given the information in the text and the knowledge that a massive sphere with uniform density behaves like there was only a point mass at its center, we infer from the Newtonian law of Gravity that

$$F_G = G\frac{M(x)m}{x^2} \,.$$

Using our expression for $M(x)$ from the previous part, we can write F_G in the desired form:

$$F_G = G\frac{M_E m}{R_E^3} x \tag{4}$$

Grading: 1 point for some explanation like the underlined part of the text above, *1 point* for (4).

iii. (1 P.) Note that we set our potential to be 0 at the earth's center. So we only have to solve the integral given in the hint to receive our potential:

$$E_{\text{pot}}(x) = \int_0^x F_G(z)\, dz = \int_0^x G\frac{M_E m}{R_E^3} z\, dz$$
$$= G\frac{M_E m}{R_E^3}\int_0^x z\, dz = G\frac{M_E m}{2R_E^3} x^2$$

Grading: 1 point for the correct solution. The explanation about the gauge is not required.

iv. (3 P.) Since there is no friction, the whole difference in the potential energy between $x = R_E$ and $x = 0$ is converted into kinetic energy:

$$E_{\text{kin}}\big|_{r=0} = E_{\text{pot}}(R_E) \tag{5}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_m^2 = G\frac{M_E m}{2R_E^3} R_E^2$$

$$\Rightarrow \quad v_m^2 = \frac{GM_E}{R_E}$$

$$\Rightarrow \quad v_m = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E}} \tag{6}$$

$$= \sqrt{\frac{3.986 \cdot 10^{14}\, \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2}}{6371\,\text{km}}} = 7910\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \tag{7}$$

Grading: 1 point for (5), *1 point* for (6), *0.5 points* for (7), *0.5 points* for the correct number of significant digits (which is 4).

Teil B. Bahnkurve des Falls (8 Punkte)

i. (2 P.) Newton's second law is $F = ma$, where F is the total force exerted on a body with mass m, and a is its resulting acceleration. Here, since there is no friction, the total force acting on the body is F_G. So:

$$mx''(t) = F_G = -G\frac{M_E m}{R_E^3} x(t) \tag{8}$$

$$\Rightarrow \quad x''(t) = -\frac{GM_E}{R_E^3} x(t) \tag{9}$$

Note that we have to put a minus sign in front of the force, since its direction is always towards the center, which we have chosen to be at $x = 0$.

Grading: 1 point for (8) with the $-$ sign, *0.5 points* if the $-$ sign is missing. *0.5 points* for a comment that (8) was obtained by using Newton's second law. *0.5 points* for () (with correct $-$ sign).

ii. (3 P.) The universal solution is

$$x(t) = A\cos(\lambda t) + B\sin(\lambda t) \,, \tag{10}$$

where $\lambda := \sqrt{\frac{GM_E}{R_E^3}}$. The first boundary condition is:

$$\begin{aligned} & x(0) = R_E \\ \Rightarrow \quad & A\cos(0) + B\sin(0) = A = R_E \end{aligned} \tag{11}$$

Next, we calculate the velocity of our body:

$$x'(t) = -\lambda R_E \sin(\lambda t) + \lambda B \cos(\lambda t)$$

The second condition is:

$$x'(0) = 0 \tag{12}$$
$$\Rightarrow \quad -\lambda R_E \sin(0) + \lambda B \cos(0) = \lambda B = 0 \tag{13}$$

Since $\lambda \neq 0$, B must be zero. Therefore, the solution is:

$$x(t) = R_E \cos\left(\sqrt{\frac{GM_E}{R_E^3}}t\right) \tag{14}$$

Grading: 0.5 points for (10), *1 point* for (11), *1 point* for (13), *0.5 points* for (14).

iii. (3 P.) With the constants A and B and the general formula for $x'(t)$ from the previous exercise, we infer that

$$\begin{aligned} x'(t) &= -\sqrt{\frac{GM_E}{R_E^3}} R_E \sin\left(\sqrt{\frac{GM_E}{R_E^3}}t\right) \\ &= -\sqrt{\frac{GM_E}{R_E}} \sin\left(\sqrt{\frac{GM_E}{R_E^3}}t\right) \end{aligned} \tag{15}$$

- **Option 1:** As we saw in the previous part, the velocity reaches its maximal value in the center of earth. So, it is sufficient to calculate $\max_{t\in\mathbb{R}} |v(t)|$. Since

$$\begin{aligned} & \forall t \in \mathbb{R} : |\sin(t)| \leq 1 \\ \Rightarrow \quad & \max_{t\in\mathbb{R}} |v(t)| = \sqrt{\frac{GM_E}{R_E}}\,. \end{aligned} \tag{16}$$

- **Option 2:** We calculate the time t_m at which the body reaches the center:

$$\begin{aligned} & x(t_m) = R_E \cos\left(\sqrt{\frac{GM_E}{R_E^3}}t_m\right) = 0 \\ \Rightarrow \quad & \sqrt{\frac{GM_E}{R_E^3}}t_m = \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \quad & t_m = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R_E^3}{GM_E}} \end{aligned} \tag{17}$$

As $v_m = |x'(t_m)|$, we calculate

$$\begin{aligned} v_m &= \left|-\sqrt{\frac{GM_E}{R_E}} \sin\left(\sqrt{\frac{GM_E}{R_E^3}}t_m\right)\right| \\ &= \left|-\sqrt{\frac{GM_E}{R_E}} \sin\left(\sqrt{\frac{GM_E}{R_E^3}}\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R_E^3}{GM_E}}\right)\right| \\ &= \left|-\sqrt{\frac{GM_E}{R_E}} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| \\ &= \sqrt{\frac{GM_E}{R_E}}\,. \end{aligned} \tag{18}$$

In both cases, we get the same result as in the previous part, which is not the least bit surprising.

Grading: 1 point for (15). Option 1: *0.5 points* for (16), *1 point* for the explanation why this calculation makes sense. Option 2: *1 point* for (17), *0.5 points* for (18). Both options: *0.5 points* for comparison with the result from part A.

Flug zu den Sternen

Note: Although the requirements for the spacecraft below appear rather unrealistic, some people are seriously pursuing these ideas. See `https://en.wikipedia.org/wiki/Breakthrough_Starshot` *for an overview.*

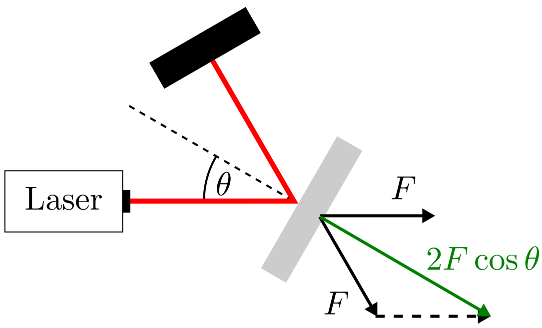
1. According to Newton's third law, there must be a equal an opposite force on the laser. That is, a force of magnitude F acts on the laser opposite to the direction of propagation of the beam.

2. We consider blocking the light by the black body as suggested in the problem. We may argue in two different ways:

   (a) The forces on the laser, the mirror, and the black body must sum to zero because there is no external force acting on the three objects.

   (b) Both the laser and the black body experience a force of magnitude F. According to Newton's third law, each of these forces must be accompanied by an equal but opposite force on the mirror.

   The two arguments are of course entirely equivalent, yielding a force $2F\cos\theta$ normal to the mirror, in the direction that points away from the laser (see figure below).

3. Based on dimensional analysis, the laser power and the force could satisfy

$$P = Fc$$

   We know from electrodynamics that this is indeed they case, although no such knowledge is required in the problem.

4. It is better to use a reflecting sail as this increases the force by a factor of 2. Moreover, an absorbing sail would heat up and would probably be destroyed by the powerful laser. Both answers are okay.

5. A light year is equal to

$$1\,\text{ly} = 365 \times 24 \times 3600\,\text{s} \times c = 9.5 \times 10^{15}\,\text{m},$$

such that the distance to Proxima Centauri is given by approximately 4.0×10^{16} m. Since this distance is orders of magnitudes larger than s_L, the final velocity is very close to the average velocity. Hence, we obtain the final velocity

$$v_f = 4.2\,\mathrm{ly}/50\,\mathrm{years} = 8.4 \times 10^{-2} c.$$

It remains to compute the acceleration required to achieve this final velocity after a distance s_L. For a constant acceleration a, we have

$$s_L = \frac{1}{2} a \Delta t^2$$

and

$$v_f = a\Delta t.$$

Solving for a yields

$$a = \frac{v_f^2}{2 s_L} = 3.2 \times 10^4\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

With a mass of 1 g, this corresponds to a force of 32 N.

I expect few students to approximate the final velocity by the average velocity. For this reason, I include a solution without this simplification. It is

$$d = \frac{1}{2} a \Delta t^2 + v_f(\Delta t_{\mathrm{tot}} - \Delta t),$$

where d is the distance to the star, a the acceleration due to the laser, Δt the duration of the acceleration, and $\Delta t_{\mathrm{tot}} = 50$ years is the duration of the entire journey. We make use of the relations $v_f = a\Delta t$ and $s_L = a\Delta t^2/2$ to express Δt and v_f in terms of a and s_L as

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2 s_l}{a}}, \qquad v_f = \sqrt{2 s_l a}.$$

By substituting into the original equation, we can solve for a to obtain

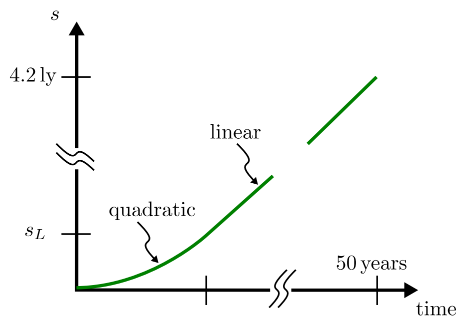
$$a = \frac{(d + s_L)^2}{2 s_l \Delta t_{\mathrm{tot}}^2}.$$

The final result is the same within the desired numerical accuracy.

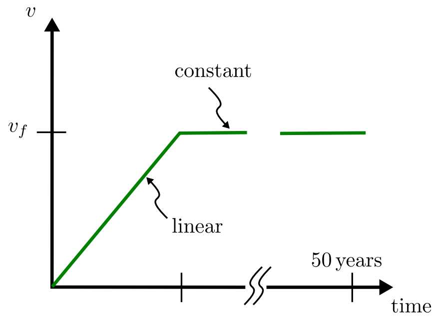
6. The plots are shown below. Ideally, the students should indicate that the duration of the acceleration very short compared to the duration of the entire flight.

7. In order to obtain the laser power, we have to multiply the result from part 6 by $c/2$. The factor of 2 arises because we assumed that the sail is reflective. (No marks should be deducted if the student argued earlier that the sail should absorb the light.) The numerical answer is

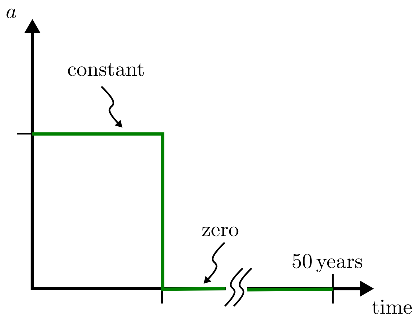
$$P = \frac{c}{2} \times 32\,\mathrm{N} = 4.8 \times 10^9\,\mathrm{W}.$$



s
4.2 ly
linear
quadratic
s_L
50 years
time



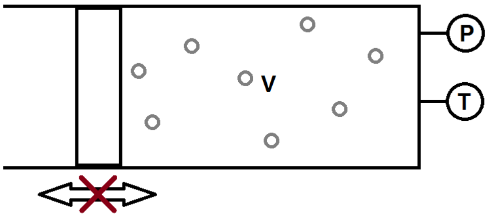
v
constant
v_f
linear
50 years
time



a
constant
zero
50 years
time

Problème 1 : Sous pression *(16 points)*

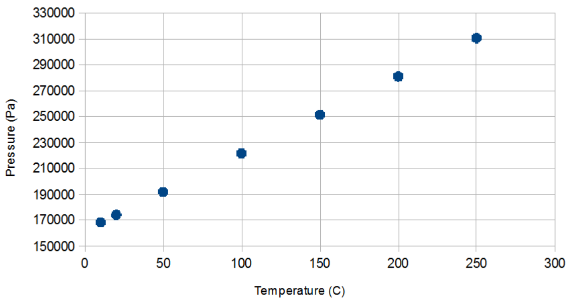
Partie A. Détermination de la masse (5 points)



De l'azote se trouve dans un cylindre de volume initial $V = 2\,\mathrm{L}$ muni d'un piston hermétique. Dans cette première partie on bloque le piston, on chauffe le gaz à différentes températures et on mesure la pression à chaque fois. Les résultats sont indiqués dans le tableau ci-dessous :

#	T(°C)	P(Pa)
1	10	168100
2	20	174000
3	50	191800
4	100	221500
5	150	251200
6	250	310600

i. (2 pts) 4 x (0.25 pt) for graph label and units = 1 pt (1 pt) for correct ploting of data Typically you take off : -(0.25 pt) if the data do not span over the whole axis (ie if they plot from 0 to 350000 for the pressure, from 150000 is sufficient and allows better visualization of the data) -(0.25 pt) if the graph is super small on the sheet of paper



ii. (3 pts)

$$PV = nRT$$

(0.5pt)

$$P = (mR/M_m V)T$$

(0.5pt)
get the slope on the graph (0.5pt) then $m = slope * M_m V/R$ (1pt)

The molar mass of nitrogen is $14\,\mathrm{g{\cdot}mol^{-1}}$, this is maybe an information we should display on the board during the exam...

(0.5 pt numerical application)

the slope is calculated by me to yield a mass of 2 g, I rounded the pressure to make it easier to plot here and there, but just taking the extreme points after realizing the relation should be linear would give them a slope of $594.16\,\mathrm{Pa{\cdot}K^{-1}} = 594.16\,\mathrm{Pa{\cdot}°C^{-1}}$ whereas the true value should be $593.89\,\mathrm{Pa{\cdot}K^{-1}}$. I will let the markers decide on how many points to give or take off depending on the students results. I will give the numerical results for $m = 2\,\mathrm{g}$ in the following sections.

Partie B. Equilibrium (2 points) **i. (2 pts)**

$$V = (mR/M_m P)T = 3.48\,\mathrm{L}$$

(1pt) where $P = P_{atm}$ (1pt)

(0.5 pt numerical application) They can take $P = P_{atm} = 1 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, anything close to that within 10% is acceptable

Partie C. We dive (9 points)

Constantes :
- Densité de l'eau : $\rho_e = 1.0\,\mathrm{gcm^{-3}}$
- Chaleur massique de l'azote : $c_a = 1.04\,\mathrm{kJkg^{-1}K^{-1}}$

i. (2 pts)

$$V = (mR/M_m P)T = 2.07\,\mathrm{L}$$

(0.5 pt) where $P = Patm + \rho_{water} * g * h$ (1pt) (0.5 pt numerical application)

ii. (3 pts) En laissant le cylindre sous l'eau quelle quantité de chaleur faut-il fournir au gas pour que son volume soit de 2 L ?

$$(VM_m P)/(mR) = Tf = 285.69\,\mathrm{K} = 12.69\,°\mathrm{C}$$

(1pt) where $P = Patm + \rho_{water} * g * h$ (0.5 pt)

$$Q = mc_{nitrogen}(Tf - Ti) = -21\,439\,\mathrm{J}$$

(1pt)

We have to take some heat from the gas (0.5 pt numerical application)

iii. (4 pts) Archimedes :

$$F_A = \rho_{water} V_{fluid} g$$

(1pt) Equilibrium :

$$F_A = (m_{cylinder} + m)g$$

(1pt) Combining the two latter (one can simplify g) :

$$\rho_{water} V_{fluid} = m_{cylinder} + m$$

(0.5 pt)

$$V = (mR/M_m P)T$$

(0.25 pt)
it yields

$$m_{cylinder}(T) = \left(\frac{\rho_{water} R}{M_m(Patm + \rho_{water} * g * h)} T - 1 \right) m$$

(1 pt)