Constantes fondamentales

Vitesse de la lumière dans le vide	c	=	$299\,792\,458\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$
Perméabilité du vide	μ_0	=	$4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{kg\cdot m\cdot A^{-2}\cdot s^{-2}}$
Permittivité du vide	ε_0	=	$8.854\,187\,817 \times 10^{-12}\,\mathrm{A^2\cdot s^4\cdot kg^{-1}\cdot m^{-3}}$
Constante de Planck	h	=	$6.626\,069\,57 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$
Charge élémentaire	e	=	$1.602\,176\,565(35) \times 10^{-19}\,\mathrm{A\cdot s}$
Constante gravitationnelle	G	=	$6.673\,84(80) \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\cdot kg^{-1}\cdot s^{-2}}$
Accélération de la pesanteur	g	=	$9.81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$
Nombre d'Avogadro	N_A	=	$6.022\,141\,29(27) \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Constante de Boltzmann	k_B	=	$1.380\,648\,8(13) \times 10^{-23}\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	=	$5.670\,373(21) \times 10^{-8}\,\mathrm{W\cdot m^{-2}\cdot K^{-4}}$
Masse de l'électron	m_e	=	$9.109\,382\,6(16) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Masse du proton	m_p	=	$1.672\,621\,71(29) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Masse du neutron	m_n	=	$1.674\,927\,28(29) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Approximations

$(1+\varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon$ si $\varepsilon \ll 1$

Problème 1 : Salade de circuits *(16 points)*

On considère un condensateur formé de deux plaques circulaires (de rayon $r = 1$ m, distance entre les plaques $d = 1$ cm,$d \ll r$, séparées par du vide). *Veuillez répondre algébriquement et numériquement à toutes les questions sauf indication contraire.*

Partie A. Énergie du condensateur (2.5 points)

Le condensateur est initialement chargé sur une source de tension $U_0 = 100$V puis séparé de cette source. La distance d entre les plaques est maintenant augmentée de $\Delta d = 0.1$ mm.

i. (1 pt) Comment la tension aux bornes du condensateur change-t-elle ? Exprimez le résultat en fonction de Q, ε_0, A et Δd.

Du fait du changement de distance entre les plaques de d à $d + \Delta d$, l'énergie du condensateur s'est modifiée. Calculez la modification au moyen des deux méthodes suivantes :

ii. (0.5 pts) à l'aide des quantités électriques

iii. (1 pt) en calculant le travail méchanique nécessaire pour augmenter la distance entre les plaques de d à $d + \Delta d$.

Partie B. Circuit LC (2.5 points)

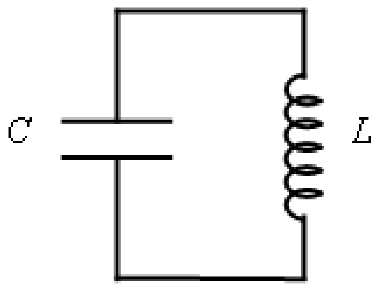

Fig. 1

Le condensateur (de nouveau avec une distance $d = 1$cm), ainsi qu'une inductance $L = 1\mu$H, sont connectés de façon à former un circuit oscillant, comme indiqué sur la Fig. 1.

i. (0.5 pts) Calculez la période T et la fréquence f de l'oscillation

Le condensateur est d'abord chargé tel qu'il ait une tension $U_0 = 100$ V à ses bornes et ensuite ce dernier est connecté à la bobine. Le circuit commence à osciller.

ii. (1 pt) Quel est le courant maximum I_0 à travers l'inductance ?

iii. (1 pt) A quoi ressemble le courant en fonction du temps $I(t)$? *(pas de réponse numérique)*

Partie C. Circuit RLC (3.5 points)

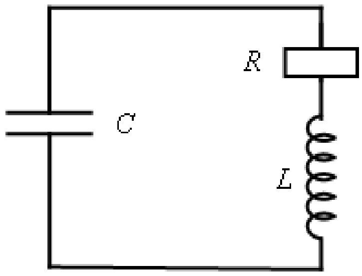

Fig. 2

Les inductance réelles sont la plupart du temps construites à partir de fil de cuivre et possèdent par conséquent une résistance Ohmique. Supposez que l'inductance réelle peut être représentée par une résistance R et une inductance L en série (cf Fig. 2.). Dans notre cas, $R = 0.01\,\Omega$. Le condensateur est à nouveau initialement chargé avec une tension de $U_0 = 100$ V avant d'être connecté en série avec l'inductance. Supposez également que le circuit oscillant est faiblement amorti, et que donc la fréquence d'oscillation peut être considérée quasiment égale à celle de la dernière question.

i. (1 pt) Calculez la puissance $P(t)$ dissipée dans la résistance R. Considérez qu'approximativement, les courants et les tensions sont les mêmes que ceux en **B.ii.** et **B.iii.**. *(pas de réponse numérique)*

ii. (1.5 pts) Calculez l'énergie dissipée en chaleur W_R au cours d'une période d'oscillation T. Exprimez W_R en fonction de R, C, L et U_0.

iii. (1 pt) Justifiez l'hypothèse que l'oscillation est faiblement amortie.

Partie D. Équilibre des pertes (7.5 points)

La perte d'énergie dans la résistance R doit être compensée de telle sorte que l'oscillation ne soit plus amortie. Pour ce faire, l'espacement du condensateur est varié par sauts d'une distance Δd (par sauts : une variation finie de d en une durée infinitésimalement courte). Le moment de la variation doit être choisi de façon à minimiser Δd.

i. (1.5 pts) Quel est le choix optimal de ces moments ? Combien de fois par période T peut-on effectuer un saut ? *(pas de réponse numérique)*

ii. (1 pt) Quelle doit être la valeur de Δd pour que l'énergie perdue en une période soit remplacée ? (Supposez que le saut soit effecté une fois par période T).

Si on veut maintenir l'oscillation, l'espacement du condensateur doit être augmenté à chaque période d'oscillation. Mais ce n'est pas possible de le faire durablement. Il faut donc rétablir l'espacement d'origine d après une période d'oscillation.

iii. (1.5 pts) Quel est le meilleur moment pour le faire ? Justifiez votre réponse. (pas de réponse numérique)

iv. (2 pts) Représentez schématiquement l'évolution temporelle de $U_C(t)$, $I(t)$ et $d(t)$.

v. (1.5 pts) Peut-on aussi remplacer l'énergie perdue dans la résistance R pendant une période d'oscillation par une manipulation mécanique sur un autre élément du circuit ? (donc une manipulation similaire à celle effectuée sur le condensateur) Comment devrait-on procéder ? Quel serait le meilleur moment pour l'ajout d'énergie ? Et pour le retour à la position initiale ? (par analogie avec **D.i.** et **D.iii.**) *(pas de réponse numérique)*

Problème 2 : Une tranche de pizza *(16 points)*

Source : Attilio Rigamonti, Andrey Varlamov, Jacques Villain “Le kaléidoscope de la physique”, Editions Belin - Pour la science, 2014.

On se propose d’étudier la cuisson d’une pizza. *Veuillez répondre algébriquement à toutes les questions sauf indication contraire.*

Partie A. Énergie nécessaire à la cuisson d’une pizza (8 points)

Dans cette partie, il faut tout d’abord estimer quelques-uns des paramètres de la pizza afin de calculer l’énergie nécessaire à sa cuisson. On considérera que la pizza est faite par un Romain : on sait qu’à Rome elle est traditionnellement fine, et que sa pâte est faite de farine, d’eau et de sel. On simplifie le modèle en négligeant la garniture et on estime l’épaisseur d’une pizza après la cuisson à l_2.

i. (1 pt) L’épaisseur de la pizza augmente-t-elle ou diminue-t-elle durant la cuisson ? (Pensez à la composition de la pâte à pizza).

Considérez que l’épaisseur de la pizza avant la cuisson est $l_1 = l_2(1 \pm \eta)$, où η est un nombre réel entre 0 et 1 qui indique le gain ou la perte d’épaisseur.

Utilisez S pour la surface de la pizza, ρ_P pour la densité de la pâte, C_P pour la chaleur massique de la pâte et L pour la chaleur latente de vaporisation de l’eau. Considérez ces quantités comme connues.

ii. (1 pt) Quelle est la température T_f de fin de cuisson de la pizza (le critère est qu’elle soit mangeable, donc pas carbonisée)

iii. (2 pts) En supposant que la puissance thermique reçue par la pizza est constante dans le temps, esquissez sur un petit graphe la courbe de la température de la pizza en fonction du temps, depuis la mise au four jusqu’au moment où elle est cuite à point.

iv. (1 pt) Quelle est l’énergie par unité de surface S nécessaire pour chauffer une pizza dont la pâte sort du réfrigérateur avec une température T_i ?

v. (1 pt) Calculez la valeur numérique de cette énergie par unité de surface avec ρ_P=800 kgm^{-3}, C_P=2700 Jkg^{-1}K^{-1}, T_i=10 °C, l_2=5 mm, η=0.2, L=2257 Jg^{-1}. Si vous n’avez pas trouvé T_f précédemment, utilisez T_f=200 °C.

vi. (1 pt) Lors de la cuisson, on estime à α le pourcentage de perte de poids par évaporation. Quelle est l’énergie par unité de surface S nécessaire à cette évaporation ?

vii. (1 pt) Calculez la valeur numérique de cette énergie par unité de surface pour $\alpha = 10\%$ et additionnez-la à votre réponse précédente afin d’obtenir l’énergie totale par unité de surface nécessaire à la cuisson d’une pizza.

Partie B. Cuisson de la pizza par le bas (4 points)

On s’intéresse à l’énergie thermique du four, sachant que le feu est capable de fournir à la pizza une quantité d’énergie par unité de surface Q/S, à travers une épaisseur de briques e.

On peut cuire une pizza en un temps τ, la température sous les briques étant de T_{foyer} et la conductivité thermique des briques Λ,

i. (1 pt) Quelle est la température T_{four} à l’interface entre les briques et la pizza ?

ii. (1.5 pts) Quelle est la quantité d’énergie par unité de surface que le feu est capable de fournir à la pizza ?

iii. (1.5 pts) Comparez cette valeur avec la quantité d’énergie par unité de surface nécessaire à chauffer une pizza si τ=160 s, T_{foyer}=330 °C, Λ=0.86 W·m^{-1}·K^{-1} et l’épaisseur de briques e=2 cm.

Partie C. Cuisson de la pizza par le haut (4 points)

Penchons-nous sur le rayonnement de la chaleur par les parois du four.

i. (1 pt) Si la température de ces dernières est de T_{paroi}, quelle quantité d’énergie par unité de surface est fournie à la pizza durant le temps de cuisson ?

ii. (1.5 pts) Quelle devrait-être la température des parois pour que l’énergie nécessaire à la cuisson soit fournie à moitié par le rayonnement ? Est-ce que la valeur obtenue est raisonnable ?

iii. (1.5 pts) Si la pizza a un rayon de 30cm et qu’elle est posée non pas sur les briques mais sur une grille en métal avec un maillage large et que le four est à la température T=300 °C, combien de temps la pizza met-elle pour cuire ?

Problème 3 : Un grand bol de particules *(16 points)*

Source : United States Physics Team 2011 SemiFinals.

Une particule de masse m est contrainte de se déplacer sans friction sur la surface intérieure d'un bol lisse dont la forme est donnée par la révolution de la fonction $z = kr^2$ autour de l'axe z (voir schéma). Initialement, la particule se situe à une hauteur z_0 au-dessus du fond du bol et possède une vitesse horizontale v_0 le long de la surface du bol. L'accélération de la gravité est donnée par $\vec{g} = -g\hat{z}$.

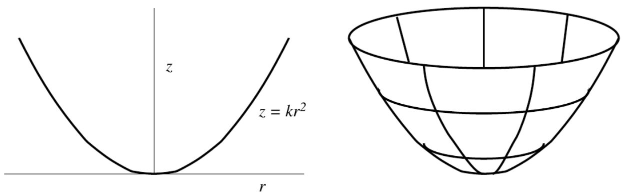

Fig. 3 – Vue en coupe du bol

Veuillez répondre algébriquement à toutes les questions.

Partie A. Relations de base (5 points)

On se propose tout d'abord d'étudier le cas simple pour lequel l'altitude de la particule ne change pas.

i. (2 pts) Quelles sont les forces agissant sur la particule ? Faites un dessin avec des vecteurs en indiquant seulement les forces agissant sur la particule.

ii. (3 pts) Pour une certaine vitesse initiale v_0, l'altitude de la particule ne change pas (elle se déplace donc sur un cercle). Exprimez v_0 en fonction de g, z_0 et/ou k.

Partie B. On bouge vers le haut (5 points)

On suppose que la vitesse initiale est à présent plus grande que v_0, appelons-la v_1. La hauteur initiale est à nouveau z_0.

i. (2 pts) Quelle(s) quantité(s) est (sont) conservée(s) ?

ii. (3 pts) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la particule ? Exprimez-la en fonction de v_1, z_0, g et/ou k ?

Partie C. On oscille vers le bas (6 points)

On suppose maintenant que la particule est lâchée depuis une hauteur z_0 avec une vitesse initiale $v_0 = 0$.

i. (4 pts) En émettant l'hypothèse que z_0 est suffisament petit, trouvez la période des oscillations de la particule dans le fond du bol.

Indice : selon la méthode utilisée, il peut être utile d'utiliser l'approximation des petits angles ou le fait que la vitesse est un vecteur avec plusieurs composantes.

ii. (2 pts) En supposant que z_0 ne soit en fait pas petit, la période des oscillations sera-t-elle plus grande, plus petite ou égale au résultat trouvé à la question précédente ? (vous n'avez pas besoin de trouver explicitement cette valeur ou de faire des calculs compliqués, justifiez votre réponse en vous aidant des résultats précédents).

Constantes fondamentales

Vitesse de la lumière dans le vide	c	=	$299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
Perméabilité du vide	μ_0	=	$4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}A^{-2}{\cdot}s^{-2}}$
Permittivité du vide	ε_0	=	$8.854\,187\,817\ldots \times 10^{-12}\,\mathrm{A^2{\cdot}s^4{\cdot}kg^{-1}{\cdot}m^{-3}}$
Constante de Planck	h	=	$6.626\,069\,57 \times 10^{-34}\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-1}}$
Charge élémentaire	e	=	$1.602\,176\,565\,(35) \times 10^{-19}\,\mathrm{A{\cdot}s}$
Constante gravitationnelle	G	=	$6.673\,84\,(80) \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}{\cdot}s^{-2}}$
Accélération de la pesanteur	g	=	$9.81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$
Nombre d'Avogadro	N_A	=	$6.022\,141\,29\,(27) \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Constante de Boltzmann	k_B	=	$1.380\,648\,8\,(13) \times 10^{-23}\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	=	$5.670\,373\,(21) \times 10^{-8}\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-4}}$
Masse de l'électron	m_e	=	$9.109\,382\,6\,(16) \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Masse du proton	m_p	=	$1.672\,621\,71\,(29) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$
Masse du neutron	m_n	=	$1.674\,927\,28\,(29) \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$

Approximations

$(1+\varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon$ si $\varepsilon \ll 1$

Problème 1 : Des gouttes *(4 points)*

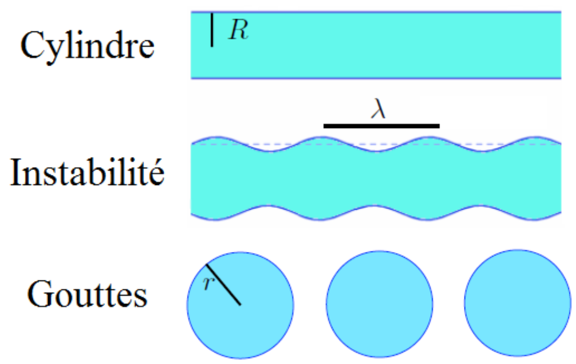

FIGURE 1

Quand est-ce qu'un jet d'eau continu se brise en gouttelettes ? Ce n'est pas une question à laquelle il est facile de répondre, car elle demande des qualifications mathématiques très poussées. On se propose plutôt de répondre à la question suivante : étant donné un jet d'eau de rayon R et de longueur L, quel est le rayon minimal r des gouttelettes si ce jet vient à se briser en n gouttelettes ? Indice : interrogez-vous sur le pourquoi de la forme sphérique d'une goutte d'eau.

Problème 2 : Courant *(4 points)*

Un circuit que vous utilisez décharge un condensateur d'une capacité de 20μF à travers une résistance inconnue. Le résultat des mesures du courant en fonction du temps est donné dans le tableau ci-dessous.

Temps (ms)	Courant (μA)
50	890
100	640
150	440
200	270
205	200

Déterminez la résistance inconnue et la tension initiale aux bornes du condensateur.

Problème 3 : Perte de contrôle *(4 points)*

Soit une voiture qui roule sur une route horizontale et arrive vers une descente. Le profil vertical de la route peut s'écrire de la façon suivante.

$$y(x) = h \quad x < 0 \tag{1}$$
$$y(x) = ax^2 + h \quad x > 0 \tag{2}$$

Quelle plage de valeurs peut-on assigner à a afin que la voiture, qui respecte la limitation de vitesse de 80 km/h, ne décolle pas de la route ? On néglige les frottements (application numérique : h=20m).

Problème 4 : Diapason *(4 points)*

On veut déterminer la vitesse du son dans un gaz inconnu. On remplit un tube de longueur L et de rayon R_1 avec ce gaz et on utilise des diapasons pour déterminer les fréquences de résonance dans le tube. Elle sont déterminées comme étant f_a et f_b. Le tube est placé à la verticale et ses deux extrémités sont ouvertes. Comment trouve-t-on la vitesse du son dans ce gaz à partir de ces deux mesures ?

Dans une deuxième partie, un tube vertical de rayon R_2, ouvert à son extrémité supérieure, contient le même gaz que précédemment. On remplit le tube par le bas avec un débit d'eau D. Alors que l'eau monte dans le tube, on fait sonner un diapason à une fréquence f. Quel intervalle de temps s'écoule entre les résonances successives à cette fréquence ?

Problème 5 : Régulateur de Watt *(4 points)*

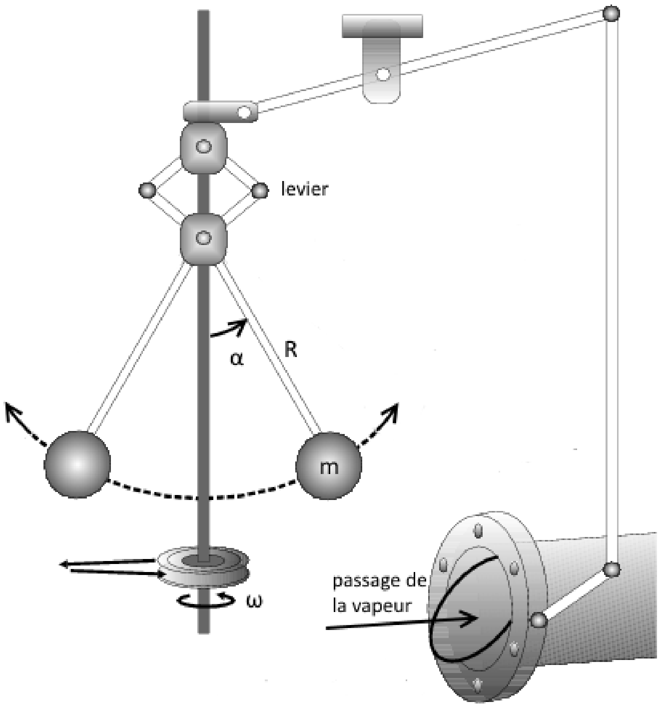

FIGURE 2

On s'intéresse au régulateur de Watt. 2 balles de masse m sont reliées par des tiges sans masse, de longueur R, à un axe en rotation sur lui-même à une vitesse angulaire ω. Le but de la machine est de faire tourner cet axe à la vitesse désirée par l'utilisateur. Le régulateur est construit de manière à ouvrir ou fermer une vanne en fonction de α (cf Fig. 2.), ce qui régule la puissance délivrée à la machine. On négligera tout frottement dans ce problème ; ne donnez que des réponses algébriques.

i. (1 pt) Calculez α en fonction de ω.

ii. (1 pt) Déterminez l'énergie du système en fonction de α.

La dérivée temporelle de α est donnée par une relation de type $\dot{\alpha} = Pf(\alpha)$ où $f(\alpha)$ est une fonction qui n'a de zéro que pour des valeurs $(k + \frac{1}{2})\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ et P est la puissance fournie au régulateur par la machine.

iii. (1 pt) On regarde maintenant du côté de la machine que le régulateur contrôle. Le régulateur contrôle une soupape qui va gérer la puissance fournie à la machine sous forme de jet de vapeur. On peut considérer $P_{fournie} = P_{max} \cos(\alpha)$. Cette puissance sert à faire tourner la machine ainsi que le régulateur. La puissance utilisée par la machine est donnée par $P_{util.} = M\omega$. Déterminez l'angle α pour lequel ω est constant.

iv. (1 pt) Que doit-on varier sur le régulateur pour changer la puissance fournie à la la machine ?

Problème 6 : Anneaux de Newton *(4 points)*

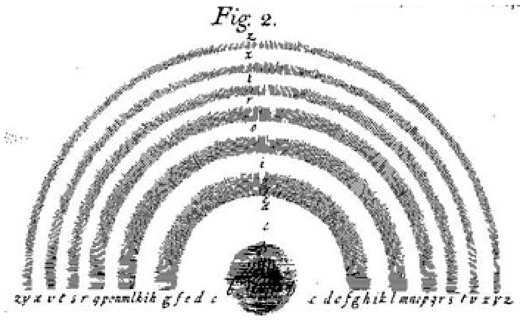

Fig. 3.

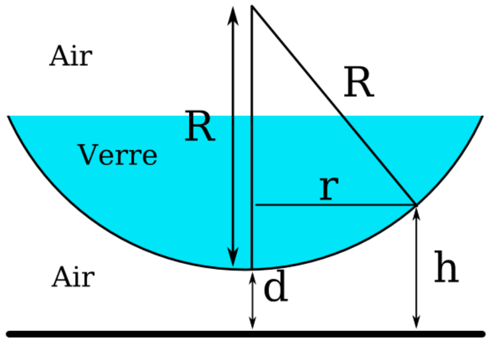

Fig. 4.

En 1717, Sir Isaac Newton a étudié un phénomène intéressant : en approchant une surface à symmétrie sphérique d'une surface réfléchissante plane, il a observé une série de cercles concentriques (voir Fig. 3.). Dans notre cas, considérez que la source de lumière est monochromatique et de longueur d'onde λ.

i. (2 pts) Expliquez pourquoi on observe ces cercles ; quelle est la condition pour observer un cercle lumineux et quelle est la condition pour observer un cercle sombre ?

Après s'être ému de la beauté des anneaux qui portent son nom, Sir Isaac Newton aurait pu se demander par exemple à quelle distance d de la surface réfléchissante sa lentille se trouvait.

ii. (2 pts) Trouvez d en fonction du rayon de courbure R de la surface courbe, du rayon r_n du n^{e} cercle sombre et de λ (cf. Fig. 4.). Quelle information cruciale vous manque-t-il pour déterminer d sur la figure (Fig. 1.) ?